

Analiză armonică - serii Fourier

Prof.dr.ing. Iulian Lupea

Dacă funcția $f(t)$ respectă condițiile lui Dirichlet fiind o funcție reală periodică definită pe intervalul $[0, T]$, este continuă sau are un număr finit de discontinuități de ordinul unu, intervalul $[0, T]$ poate fi împărțit într-un număr finit de subintervale, pe fiecare $f(t)$ fiind monotonă, $f(t)$ este integrabilă atunci se poate dezvolta în serie Fourier astfel:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \quad (7.1)$$

unde coeficienții constanți a_k și b_k sunt de forma:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_1 t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \infty \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_1 t) dt, \quad k = 1, \dots, \infty \quad (7.2)$$

iar

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi / T_1 \quad (7.3)$$

unde f_1 este frecvența armonică fundamentală iar corespunzător T_1 este perioada funcției $f(t)$.

Coeficienții a_k și b_k s-au obținut prin înmulțirea expresiei (7.1) cu $\cos(k\omega_1 t)$ respectiv $\sin(k\omega_1 t)$ și integrarea tuturor termenilor pe o perioadă. Ținând cont de relațiile de ortogonalitate ale funcțiilor armonice [vezi bibliografie] se anulează majoritatea termenilor rămânând relațiile (7.2). Se poate scrie mai compact:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad (7.4) \text{ echiv } (7.1)$$

unde:

$$\varphi_k = \arctg \frac{-b_k}{a_k}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad A_0 = \frac{a_0}{2} \quad (7.5)$$

S-a efectuat următorul calcul:

$$a_k \cos \alpha + b_k \sin \alpha = a_k (\cos \alpha - \tg \varphi_k \sin \alpha) = \frac{a_k}{\cos \varphi_k} \cos(\alpha + \varphi_k) =$$

$$a_k \sqrt{\tg^2 \varphi_k + 1} \cos(\alpha + \varphi_k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(\alpha + \varphi_k)$$

notându-se $\alpha = k\omega_1 t$.

Reprezentare prin vectori rotitori în planul complex

Trecând la exprimarea prin vectori rotitori în planul complex, se poate scrie:

$$f(t) = A_0 + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j(k\omega_1 t + \varphi_k)} \right) \quad (7.6)$$

Se însumează numai proiecția pe axa reală a vectorilor complecși rotitori deoarece și funcția este reală. Această relație este exprimată grafic, printr-un exemplu de funcție periodică, în figura 7.1.

În partea de sus și în dreapta figurii s-a trasat o diagramă amplitudine frecvență denumită spectrul Fourier asociat funcției periodice. Fiecare segment vertical din diagramă reprezintă o linie spectrală, având înălțimea proporțională cu coeficientul Fourier real corespunzător $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ și plasarea pe abscisă conform frecvenței f_k asociate. În partea de jos sunt trasate proiecțiile reale ale vectorilor rotitori. Funcția $f(t)$ este obținută prin

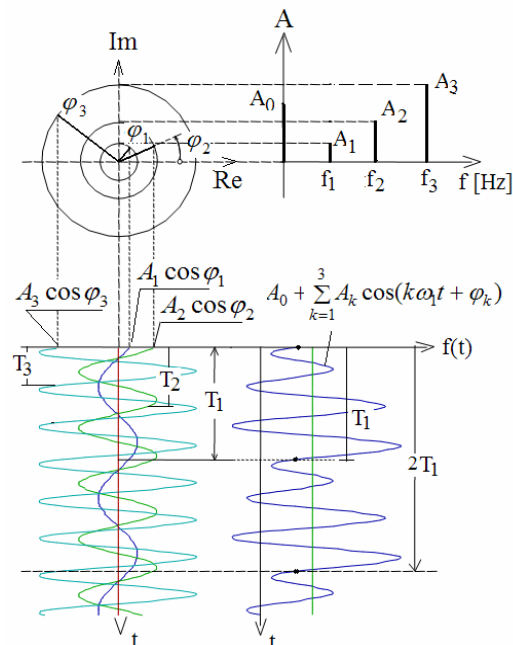
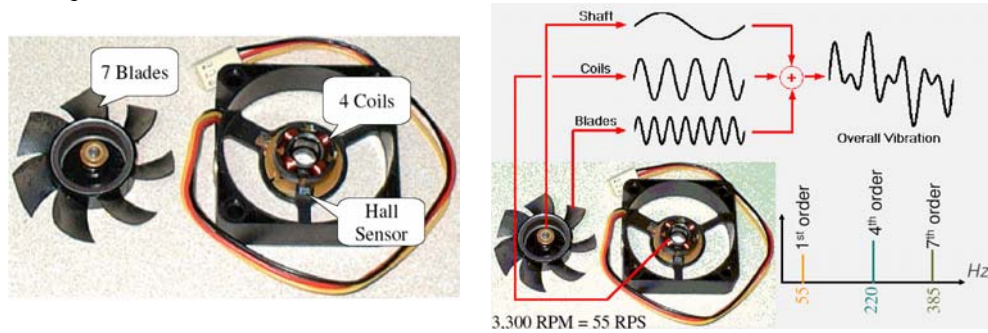


Fig. 7.1

însuşarea proiecţiilor vectorilor rotatori.

Semnale periodice descompuse în armonice

Exemplul #1



Exemplul #2

Spectru de frecvenţe obţinut pentru un agregat având în componenţă piese în rotaţie: arbori, rulmenţi, roţi dinţate.

