

COMPUNEREA OSCILAȚIILOR ARMONICE SIMPLE

Efectele forțelor care acționează asupra oscilatorului armonic se pot suprapune sau compune pe baza principiului superpoziției, principiu valabil pentru sistemele cu comportament liniar.

Vor fi tratate **trei cazuri** de baza privind compunerea oscilațiilor armonice.

1. Compunerea oscilațiilor armonice pe aceeași direcție, de aceeași frecvență dar cu amplitudini și faze inițiale diferite

Un oscilator este supus simultan la două mișcări armonice de forma:

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{și} \quad x_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Masa oscilatorului va efectua o mișcare rezultată din suprapunerea celor două mișcări:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Vom considera doi vectori rotitori (fazori) Z_1 și Z_2 în planul complex a căror proiecții în real sunt mișcările x_1 și x_2 de mai sus.

Vom însuma vectorii iar rezultatul $Z(t)$ va fi proiectat în real:

$$Z(t) = Z_1 + Z_2 \quad \text{sau} \quad ae^{j(\omega t + \varphi)} = a_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} + a_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}$$

Se poate simplifica cu $e^{j\omega t}$ rezultând:

$$ae^{j\varphi} = a_1 e^{j\varphi_1} + a_2 e^{j\varphi_2}$$

Se proiectează relația pe cele două axe perpendiculare:

$$a \cos \varphi = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 \quad \text{și} \quad a \sin \varphi = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2$$

Pentru determinarea modulului fazorului rezultat se aplică teorema lui Pitagora:

$$a = \sqrt{(a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2)^2 + (a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2)^2} \quad \text{sau:} \quad a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\text{Faza este: } \varphi = \arctan \left(\frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2} \right)$$

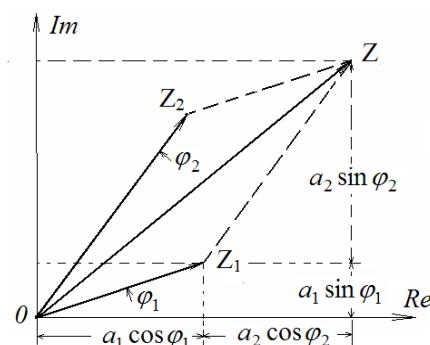
Se poate generaliza pentru compunerea a n funcții armonice. Modulul și faza sunt:

$$a = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i \cos \varphi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i \sin \varphi_i \right)^2}, \quad \varphi = \arctan \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n a_i \cos \varphi_i} \right)$$

Amplitudinea și faza depind numai de a_i și φ_i . Astfel amplitudinea mișcării rezultate dată de Z este constantă în timp, mișcarea fiind de asemenea armonică. Cei trei vectori Z_1 , Z_2 și Z au aceeași pulsație ω .

Amplitudinea este maximă $a = a_1 + a_2$ dacă vectorii Z_1 și Z_2 sunt în fază $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \cdot k$

Amplitudinea este minimă $a = a_1 - a_2$ dacă vectorii Z_1 și Z_2 sunt în opoziție de fază $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1) \cdot \pi$ unde $k=0,1,2,\dots,n$.



Vect. rotitori: $Z = Z_1 + Z_2$

2. Compunerea vibrațiilor armonice pe direcții paralele având pulsații diferite

Legile de mișcare ale oscilatorilor sunt de forma:

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{și} \quad x_2(t) = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \text{unde } \omega_1 \neq \omega_2.$$

Vectorii rotitori asociați sunt:

$$Z_1 = a_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} \quad Z_2 = a_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

Mișcarea rezultată este descrisă de suma fazorilor:

$$Z = Z_1 + Z_2 = a_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + a_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

Unghiul dintre fazori variază fiindcă vectorii se rotesc cu viteze unghiulare diferite $\omega_1 \neq \omega_2$.

Amplitudinea lui Z este variabilă fiind dependentă de unghiul variabil dintre vectorii Z_1 și Z_2 .

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]}$$

Amplitudinea variază periodic între un **maxim**:

$$a_{\max} = a_1 + a_2$$

când vectorii sunt *în fază* $(\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1) = 2\pi \cdot k$ sau: $(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \cdot k$ și valoarea **minimă**:

$$a_{\min} = a_1 - a_2$$

când vectorii sunt *în antifază* $(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1) \cdot \pi$.

Dacă amplitudinile sunt apropiate ca mărime diferența dintre amplitudinea maximă și cea minimă a mișcării compuse este mai pronunțată rezultând fenomenul „bătăilor”. În acest caz sunt sesizate periodic maximele de amplitudine în contrast cu minimele.

Amplitudini egale: $a_1 = a_2 = a$ rezultă $a_{\min} = 0$

$$x = x_1(t) + x_2(t) = a \cos(\omega_1 t) + a \cos(\omega_2 t) = 2a \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

$$\text{sau: } x = 2a \cos(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t) \cdot \cos(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t)$$

Frecvența bătăilor

Diferența dintre vitezele unghiulare ale celor doi vectori rotitori este $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ [rad/s]. Presupunem că vectorii rotitori inițial sunt suprapuși. La fiecare secundă vectorul cu viteză unghiulară mai mare se poziționează în fața celui alt cu $\Delta\omega$ radiani. În câte secunde vectorul cu viteză unghiulară mai mare se poziționează în fața celui alt cu 2π radiani deci cu o rotație completă încât se vor suprapune din nou?

$$\frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{f_1 - f_2} = T_b [s] \quad \text{sau:} \quad f_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2$$

Aplicație #1: ascultarea a două diapazoane excitate simultan și așezate în paralel; nu sunt sesizate distinct oscilațiile diapazoanelor (numai frecvența) dar este sesizată variația amplitudinii semnalului compus cu frecvența egală cu diferența frecvențelor (diapazoanele au frecvențele apropiate). Dacă diapazoanele au frecvențele $f_1 = 440.5$ Hz și $f_2 = 440$ Hz, rezultă $f_b = 0.5$ Hz iar $T_b = 2$ s. Perioada bătăilor este mai mare cu cât diferența pulsațiilor este mai mică. Astfel, pentru 440.2 Hz și 440 Hz $T_b = 1/0.2 = 5$ s.

2. Aplicație #2 pentru observarea fenomenului de bătaie (variație amplitudine la 440 Hz) Advanced Spectrum Analyzer



Setări:

Input samples (N): 2048,..., 16385

Window function: Hanning, Hamming etc.

Sampling frequency (F_s): 44100, 48000

Input source: Default Mic., Second Mic.

Averaging factor: 4,...,10

Logarithmic scale: T/F



Peaks

$$\Delta f = \frac{F_{es}}{N}$$

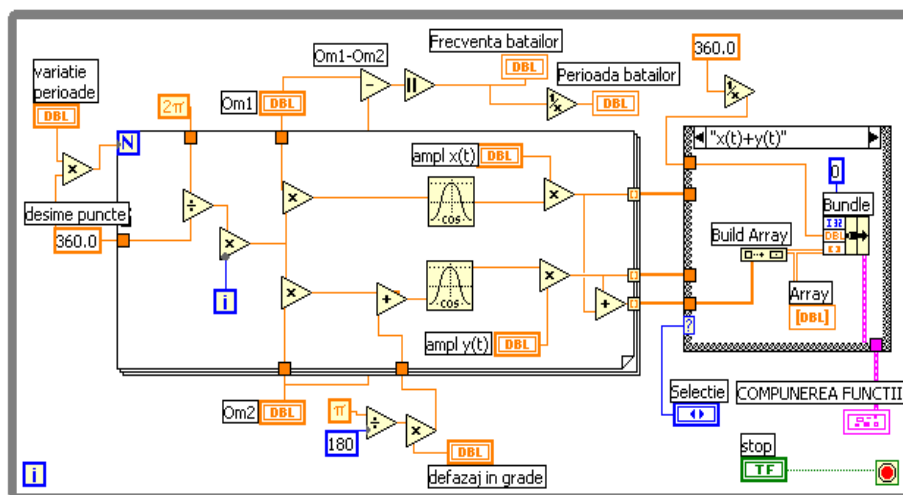
$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot dt}$$

Fenomenul de bătaie obținut cu perechea de diapazoane. Se va urmări creșterea și scăderea alternativă a amplitudinii vârfului spectral de 440Hz la analiza spectrală a sunetului generat de cele două diapazoane.

Se deplasează spre vârful furcii cele două mase care glisează pe brațele furcii unui diapazon. Frecvența aceluia diapazon scade deoarece se aduce aport de masă spre vârful furcii. Astfel frecvența bătaii crește fiindcă diferența frecvențelor tonurilor generate de cele două diapazoane crește: $f_b = f_1 - f_2$.

Aplicație #3: simulare în Labview

Pentru fiecare funcție armonică $x(t) = a_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)$ și $y(t) = a_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \phi)$ se impune pulsația mișcării oscilatorii (ω_1 respectiv ω_2) și amplitudinile, iar pentru armonica $y(t)$ se poate defini faza în grade (urmând să fie transformată în radiani prin relația $\pi/180 \cdot \text{defazaj}$)



Numărul de puncte de reprezentare pentru fiecare curbă este produsul dintre controlul *variație perioade* și constanta 360, influențând direct variabila timp (Fig. 1).

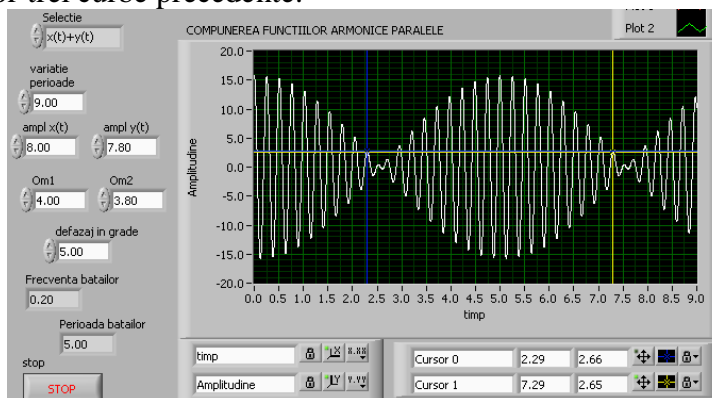
Furnizarea de argumente se face prin relația $\Omega * 2 * \pi / 360 * i$, observabilă în diagramă, unde Ω se referă la controalele ω_1 și ω_2 .

La ieșirea din cadrul ciclului For sunt disponibile trei tablouri unidimensionale reprezentând valori pentru cele două armonice și pentru funcția periodică obținută prin însumarea armonicilor.

Urmează o structură de decizie Case cu patru cazuri, permițând vizualizarea independentă a curbelor $x(t)$, $y(t)$, $x(t)+y(t)$ și simultan a celor trei curbe precedente.

În final, este asamblată o structură de date, ce conține punctul de start al timpului $x_0 = 0$, spațierea între puncte și tabloul 2D. Structura este generată prin folosirea funcției Bundle. Această structură se conectează la obiectul pentru vizualizare grafică Waveform Graph.

În figura 2 observăm fenomenul de bătaie sau de creștere a amplitudinii la intervale regulate de timp. Fenomenul se obține când frecvențele și amplitudinile celor două vibrații armonice compuse sunt relativ apropiate.



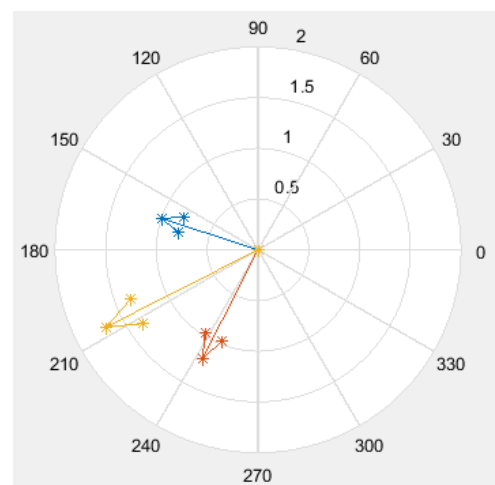
Tabel #1. Trasați curbe obținute cu aplicația Labview respectând relațiile indicate privind amplitudinile și frecvențele și completați tabelul

$a1 < a2$ $x1(t)$ de amplitudine mică și frecvență mică $f1 < f2$ $x2(t)$ de amplitudine mare și frecvență mare	$a1 > a2$ $x1(t)$ de amplitudine mare, frecvență mică $f1 < f2$ $x2(t)$ de amplitudine mică, frecvență mare
Fenomen de bătaie $a2 = 0.5 * a1$	Bătaie propunată: $a2 \approx a1$

Aplicație #4, simulare Matlab

```

clear; clf;
om1=2*pi;
om2=2*pi+pi; j=sqrt(-1);
load train;
for t=0:.01:4
    v1=1 * exp(j*om1*t);
    v2=1.2*exp(j*om2*t);
    v3=v1+v2;
    compass([v1, v2, v3], '-*');
    if abs(rem(om2*t-om1*t, 2*pi))<.05
        % diferenta intre unghiurile maturate
        % redusa la un cerc trigo
        sound(y,16000);
    end
    pause(.0001);
end
  
```



3. Compunerea vibrațiilor armonice pe direcții perpendiculare (curbe Lissajous)

Se vor vizualiza curbele obținute din compunerea a două semnale armonice pe direcții perpendiculare (Fig. 3). Este folosit indicatorul grafic XY Graph.

Ecuatiile celor două armonice sunt:

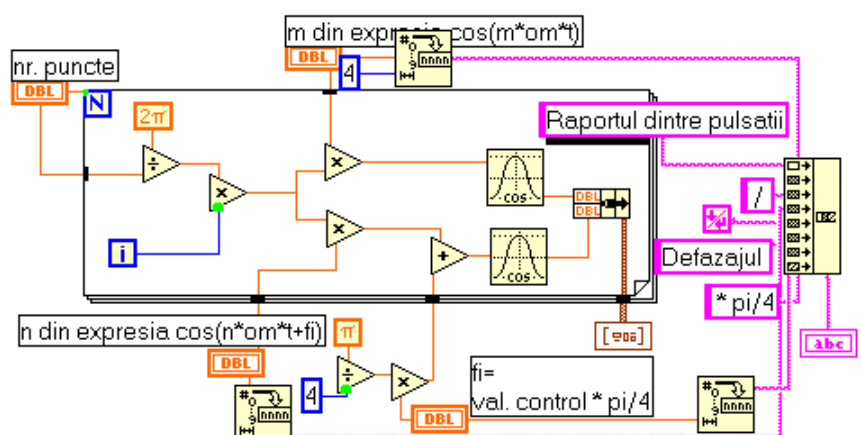
$$x(t) = A \cos(m\omega t)$$

$$y(t) = B \cos(n\omega t + \varphi)$$

În panoul frontal (Fig. 4) putem interveni prin obiectele de tip control asupra mărimilor m , n și asupra unghiului de defazaj φ (în salturi de $\pi/4$).

Sub grafic se afișază raportul curent al pulsațiilor m/n pentru curba generată și defazajul.

În diagramă se compun cele două armonice în cadrul unui ciclu For iar în afara lui este plasat obiectul XY Graph care primește o structură de două tablouri de câte 300 de puncte fiecare.



Valorile de control m , n și ϕ sunt plasate înafara cadrului ciclului.

În figură se pot număra “perioadele” (prezente în curba închisă) pe direcția x ($m=3$ perioade) și pe direcția y ($n=2$ perioade). Se pleacă de exemplu de la marginea stângă a ecranului; se numără parcurgând curba reveniri (3) la aceeași margine. La fel se procedează pe direcția y rezultând două reveniri.

Mesajul de sub grafic este compus prin concatenarea unor constante și de caractere de tipul “Raportul dintre pulsatii”, “/”, “Dafazajul”, “* $\pi/4$ ” și valorile de control transformate în constante și de caractere prin intermediul funcțiilor To

Decimal (Fig. 5)

Concatenarea constantelor se realizează prin funcția *Concatenate Strings* (Fig. 6, Functions/ String).

Pentru trecerea pe rândul al doilea în cadrul mesajului s-a folosit constanta *End of Line* (Fig. 7) disponibilă în paleta *Structs & Constants*.

Calculul funcțiilor armonice pentru valorile în radiani s-a realizat cu funcția *Cosine* din paleta *Functions/ Trigonometric*.

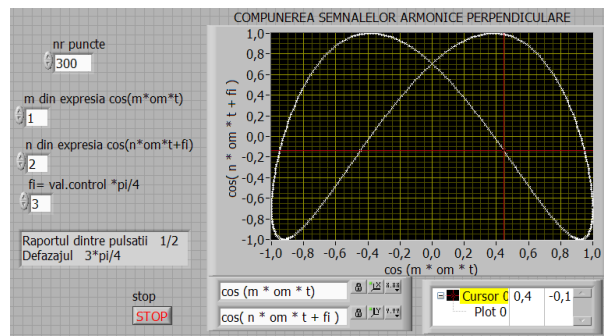


Fig. 5

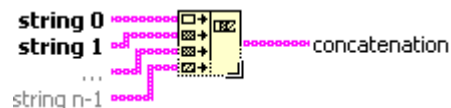
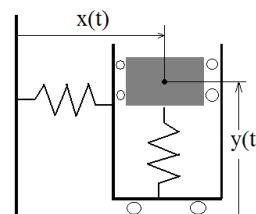


Fig. 6



Fig. 7

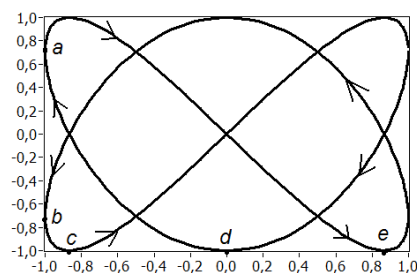


Tabel #2 Se obțin, se trasează și se dispun curbele Lissajous tabelar

	1:1 om1x/om2y	1:2 (m/n)	1:3	1:4	2:3	3:4
$\phi=0$						
$\phi=\pi/4$						
$\phi=\pi/2$						
$\phi=3\pi/4$						
$\phi=\pi$						

La fiecare curbă Lissajous se pot număra “perioadele” (prezente în curba închisă) pe direcția x (m perioade) și pe direcția y (n perioade). De exemplu pentru $m/n=2/3$, $\phi=\pi/4$, se poate pleca de la punctul ‘a’ de tangență cu marginea stângă a ecranului; se numără parcurgând curba prima revenire la punctul de tangență dreapta jos ‘b’ și a doua revenire la punctul de pornire ‘a’. La fel se procedează pe direcția y : punctul de pornire ‘c’, prima revenire în ‘d’ a doua în ‘e’ și a treia în punctul de pornire ‘c’.

Punctul de pornire ($t=0$) al curbelor cu $\phi=0$ este (1,1); pentru linia



$\phi = \pi/4$ este $(1, \cos(\pi/4))$; pt. linia $\phi = \pi/2$ este $(1,0)$; pt. $\phi = 3\pi/4$ este $(1,-0.7)$; pt. $\phi = \pi$ este $(1,-1)$.

Aplicație #1 Android: Grapher Free - Equation Plotter & Solver

Curve types:

- Function (e.g. parabola, sine wave) e wave)
 - Polar (e.g. rose, spiral)
 - **Parametric** (e.g. ellipse, **Lissajous**) on the xy-plane or r θ -plane
x(t); y(t)
- exemplu: $\cos(2t)$; $\cos(3t + \pi/4)$

