O problemă cu vectori rotitori în planul complex

1. Se consideră două mişcări vibratorii armonice descrise de vectorii rotitori $Z_1(t) = 2e^{j(3t+\pi/3)}$ şi $Z_2(t) = 2e^{j(3t+\pi/2)}$.
1.Să se determine întârzierea în timp dintre cele două mişcări armonice.
2.Se trasează armonicele în timp. 3.Calculaţi vectorul sumă.

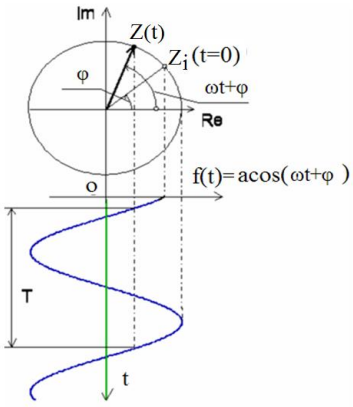


Fig. 1. Pr. reală fazor

Rezolvare:

1.vectorii rotitori au raza 2 şi fazele iniţiale pi/3, respectiv pi/2.

α1=ωt+ pi/2

*α2=ωt+ pi/3 => (pi/2 - pi/3)=3*t*

=> t=pi/6/3

=> $\boxed{t=pi/18\ [s]}$

O problemă cu compunere oscilaţii de frecvenţe apropiate/ fenomenul de bătaie.

2. Două diapazoane au frecvenţele f_1=440.3 Hz şi f_2=439.9 Hz. Care este perioada şi frecvenţa bătăii sesizate cu urechea?

Rezolvare:

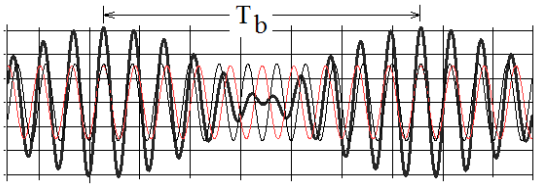
Cei doi vectori rotitori pornesc deodată.

După Tb secunde cel cu viteză unghiulară mai mare va fi în faţa celuilalt cu unghiul 2π.

Rezultă relaţia $\omega_1 T_b = \omega_2 T_b + 2\pi$. Simplificăm cu 2π şi scoatem factor T_b:

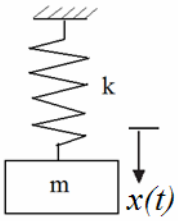
$$(f_1 - f_2)T_b = 1$$

rezultă $f_b = 0.4Hz$ iar $T_b = 2.5s$. Perioada bătăilor este mai mare cu cât diferenţa pulsaţiilor este mai mică. Se foloseşte practic perechea de diapazoane + aplicaţii pe telefonul mobil: Advanced Spectrum Analyzer Pro, FFTWave şi sistem achiziţie NI cu o aplicaţie LabVIEW.



O problemă cu identificare de parametri în sisteme simple de genul celor din Laborator 1

3.1. Se atârnă o masă de 0.5 kg la capătul unui arc elicoidal în câmp gravitaţional. Arcul se întinde 1.e-2 m pentru atingerea echilibrului static al masei. Să se determine frecvenţa naturală a sistemului masă-arc.

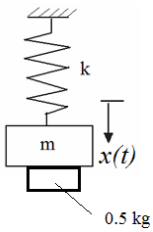


Rezolvare:

F=k*x => k=F/x k=$\frac{0.5*g}{x}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{m*g}{m*x}}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x}}}$

R:sqrt(g/x) [1/s]

3.2. Un sistem masa (m) - arc (k) vibrează liber cu frecvenţa naturală de f_0=1.Hz.
Se adaugă la masa m o masă de 0.5 kg iar frecvenţa naturală a noului sistem se reduce la 0.8 Hz.
Să se determine m şi k.



Rezolvare:

$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ => sistem 2 ec. cu 2 nec.: $2\pi*1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ şi $2\pi*0.8 = \sqrt{\frac{k}{m+0.5}}$

*O problemă cu **1gdl cu amortizare** şi plasare de poli în planul complex* σ_0, $j\omega$

4.1. Se consideră un sistem format dintr-o masă m=10kg, un arc având coeficientul de rigiditate k=1000N/m şi un amortizor vâscos. Coeficientul de amortizare se consideră pe rând de valoare c_1=20Ns/m, c_2=200Ns/m, c_3=240 Ns/m.

Efectuând calculele se obţine:

pulsaţia naturală a sistemului $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10$, independentă de amortizare,

coeficientul critic de amortizare $c_0 = 2m\omega_0$ (200 Ns/m);

rapoartele de amortizare $\zeta_1 = 0.1$, $\zeta_2 = 1$, $\zeta_3 = 1.2$, corespunzător fiecărui amortizor, rezultând în ordine amortizare subcritică, critică şi supracritică. **Să se plaseze polii sistemului în planul complex**.

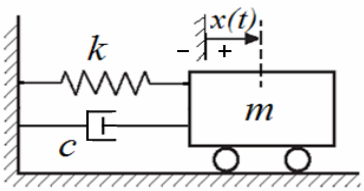


Fig. 5. Sistem masă-arc-amortizor vâscos

Rezolvare:

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sau **polii sistemului** în funcţie de ζ sunt:

$$\boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}} \text{ unde: } \boxed{\zeta = \frac{c}{c_0}} \quad \boxed{c_0 = 2m\omega_0}$$

Caz#1 amortizare =0 => $\zeta = 0$ => polii: $\boxed{s_{1,2} = \pm j\omega_0}$

Caz#2 amortizare subcritică: $0 < \zeta < 1$

$$\boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad j = \sqrt{-1}$$

Polii se rescriu în forma: $s_{1,2} = -\sigma_0 \pm j\omega_d$

Cazul#3 al amortizării critice $\zeta = 1$

$$\boxed{s_{1,2} = -\omega_0}$$

Cazul #4 al amortizării supracritice ($\zeta > 1$)

$$s_{1,2} = -\zeta\,\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

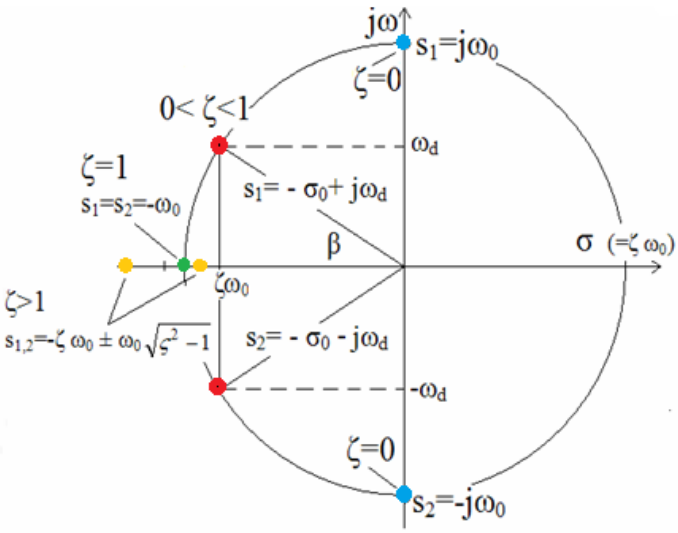


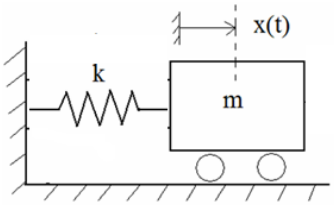
Fig. 6. **Polii sist.** pt: $\zeta = 0$, $0 \le \zeta \le 1$, $\zeta = 1$, $\zeta \ge 1$ în **planul complex Laplace**

2 probleme de deducere a ecuaţiei diferenţiale asociate unui sistem 1gdl prin două metode diferite.

5.1. Determinarea ecuaţiei diferenţiale a sistemului **masă-arc** prin Metoda conservării energiei.

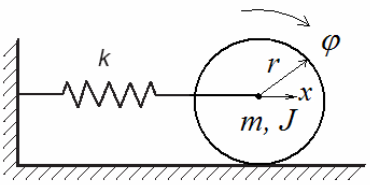
$$Ep = \frac{1}{2}kx^2 \qquad Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$E = Ec + Ep = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$



$$\frac{d}{dt}(E) = 0 \qquad kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0 \qquad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

5.2. Un cilindru de masă m şi moment de inerţie J se rostogoleşte fără alunecare pe o suprafaţă orizontală fiind constrâns în mişcare de un resort k, conform figurii alăturate. Să se determine perioada oscilaţiilor cilindrului.



Metoda conservării energiei pentru un sistem conservativ: Et=Ec+Ep=ct. se conservă energia totală. Ec este stocată în mase în mişcare iar Ep este stocată în forma energiei de deformare elastică sau lucru mecanic efectuat în câmp de forţe conservative, de exemplu câmp gravitaţional.

$$\frac{d}{dt}(Ec+Ep)=0; \quad Ec=\frac{1}{2}m(r\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 \quad Ep=\frac{1}{2}k(r\varphi)^2$$

$$Etot=\frac{1}{2}(mr^2\dot{\varphi}^2+J\dot{\varphi}^2+k\varphi^2 r^2)$$

$$\frac{d}{dt}(Etot)=0 \quad =>$$

$$1/2[mr^2 2\dot{\varphi}\ \ddot{\varphi}+J2\dot{\varphi}\ \ddot{\varphi}+kr^2 2\varphi\ \ \dot{\varphi}]=0$$

$(mr^2\ \ddot{\varphi}+J\ \ddot{\varphi}+kr^2\varphi)\dot{\varphi}=0$ $\quad\dot{\varphi}$ nu poate fi tot timpul zero ! $\quad =>$

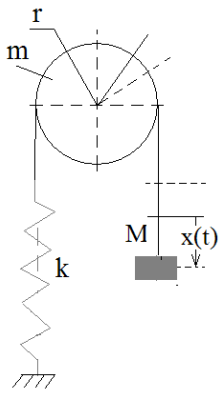
$$(mr^2+J)\ddot{\varphi}+kr^2\varphi=0$$

$$\ddot{\varphi}+\frac{kr^2}{(mr^2+J)}\varphi=0 \qquad \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m+J/r^2}}}$$

*rescrieţi ecuaţia diferenţială în funcţie de **coordonata liniară x(t)**; pulsaţia naturală este aceeaşi.

deduceţi ecuaţia dif. din **ecuaţia dinamică de momente în jurul liniei de contact a cilindrului cu solul.

***deduceţi ecuaţia diferenţială şi pulsaţia naturală pentru sistemul (tambur J) din figura cu scripete; în poziţia de echilibru forţa de greutate este echilibrată de forţa elastică din arc (similar problema 5.1: masă-arc cu vibr. pe verticală).



5.3. Un volant de masă m=30kg pendulează în jurul unui punct de sprijin A plasat pe raza interioară r=0.2m conform figurii alăturate, înregistrând frecvenţa f=0.8Hz. Să se determine momentul de inerţie mecanic J_0 al volantului în jurul axei geometrice (aceasta trece prin o).

$$J_A\ddot{\varphi}=-mg\sin(\varphi)\cdot r, \quad J_A\ddot{\varphi}+mgr\varphi=0$$

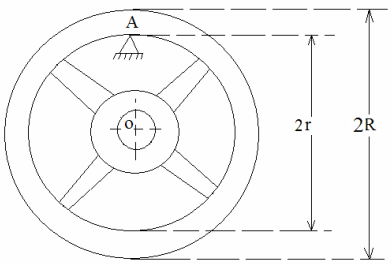
$$\ddot{\varphi}+\frac{mgr}{J_A}\varphi=0 \quad => \quad \omega_0^2=\frac{mgr}{J_A} \quad => \quad J_A=\frac{mgr}{\omega_0^2}$$

J_A [kg*m^2] este momentul de inerţie mecanic al corpului în jurul axei de rotaţie A.

Conform Teoremei lui Steiner:

$$J_A=J_0+mr^2 \quad => J_0=J_A-mr^2$$

J_0 moment inerţie faţă de axa care trece prin centrul de masă, J_A momentul de inerţie faţă de o axă paralelă.

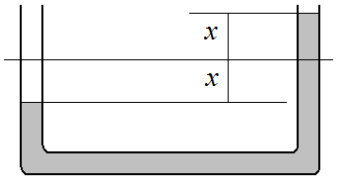


5.4. Manometru cu tub de formă U. Lungimea lichidului L. Să se determine frecvenţa de oscilaţie a lichidului.

$$m\ddot{x}=-2xA\rho g$$

$$LA\rho\,\ddot{x}+2A\rho g\,x=0$$

$$\ddot{x}+\frac{2g}{L}\cdot x=0 \qquad \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{2g}{L}}}$$



6. VIBROGRAME - Laborator #3

*6.1.**Teme**: fiecare student primeşte o pereche de puncte numerotate p1,p2,...,p35, de pe vibrogramele V1,V2,V3,V4:*

p1(1,3)V1,	*p4(1,4)V1*	*p7(6,8)V1*	*p10(6,9)V1*	*p13(1,2)V2,*	*p16(2,3)V2*	*p19(5,6)V2*
p2(2,4)V1,	*p5(2,5)V1*	*p8(7,9)V1,*	*p11(7,10)V1*	*p14(1,3)V2,*	*p17(2,4)V2*	*p20(5,7)V2*
p3(3,5)V1	*p6(1,2)V1,*	*p9(8,10)V1*	*p12(1,5)V1*	*p15(1,4)V2*	*p18(1,4)V2*	*p21(3,4)V2*
p22(1,3)V3	*p23(2,4)V3*	*p24(1,4)V3*	*p25(1,4)V4*	*p26(2,5)V4*	*p27(3,6)V4*	*p28(4,7)V4*
p29(1,5)V4	*p30(2,6)V4*	*p31(4,7)V4*	*p32(1,2)V4*	*p33(2,3)V4*	*p34(1,7)V4*	*p35(1,8)V4*

6.2. Pe baza vibrogramei trasate cu programul Matlab să se determine decrementul logaritmic **δ**, raportul de amortizare **ζ**, pulsaţa naturală ω_0, pulsaţia amortizată ω_d. Se estimează şi condiţiile iniţiale x_0, v_0. **Mărimi de măsurat**:

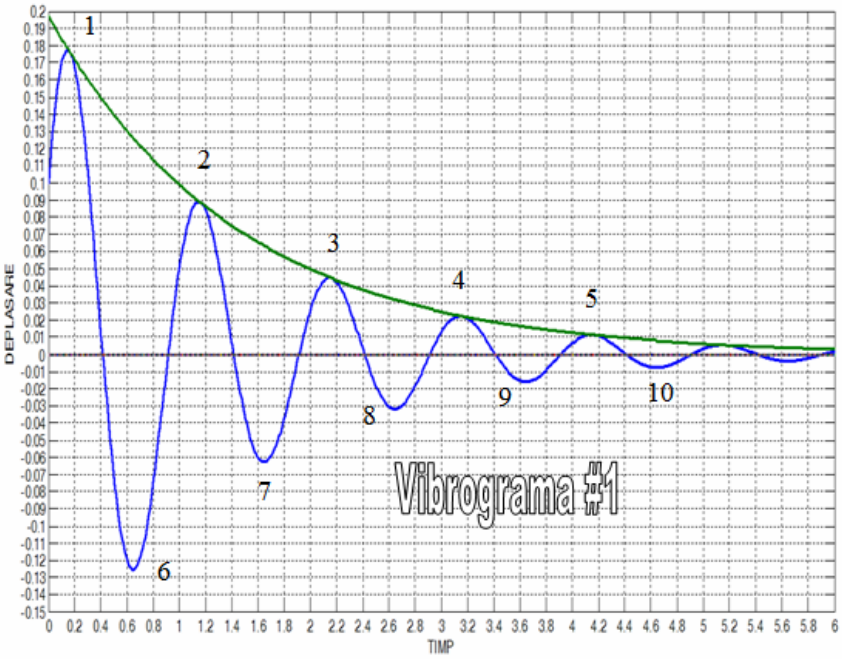
x(t), x(t+n·Td), Td

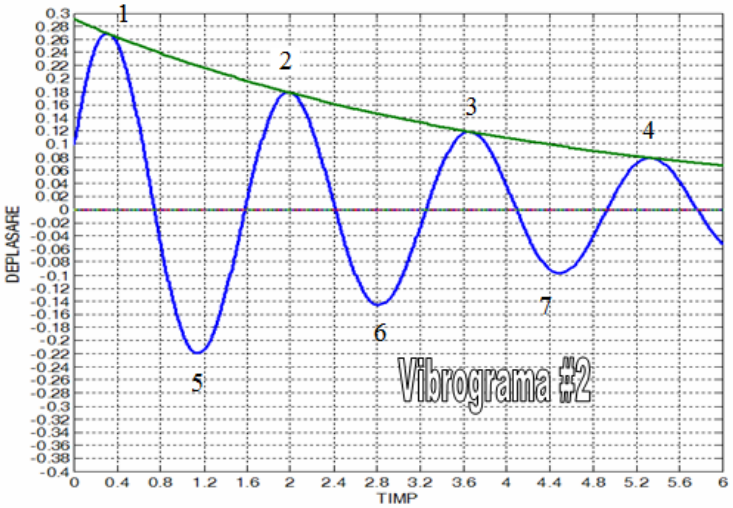
Exemplu: pentru *p34(1,7)V4 se măsoară Td pe abscisă şi ordonatele punctelor 1 şi 7 din Vibrograma #4, iar n=6.*

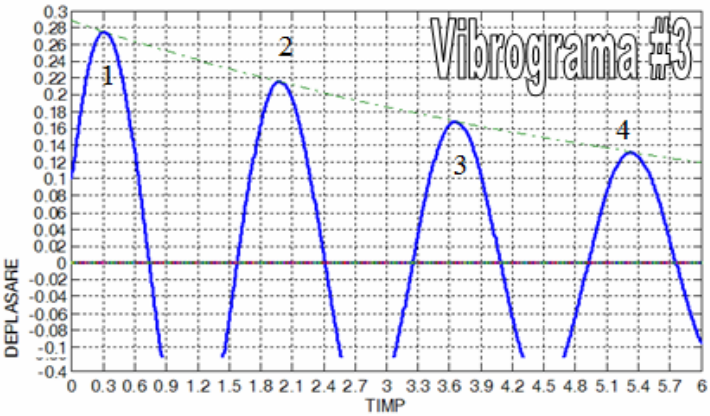
$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \zeta \omega_0 T_d$$

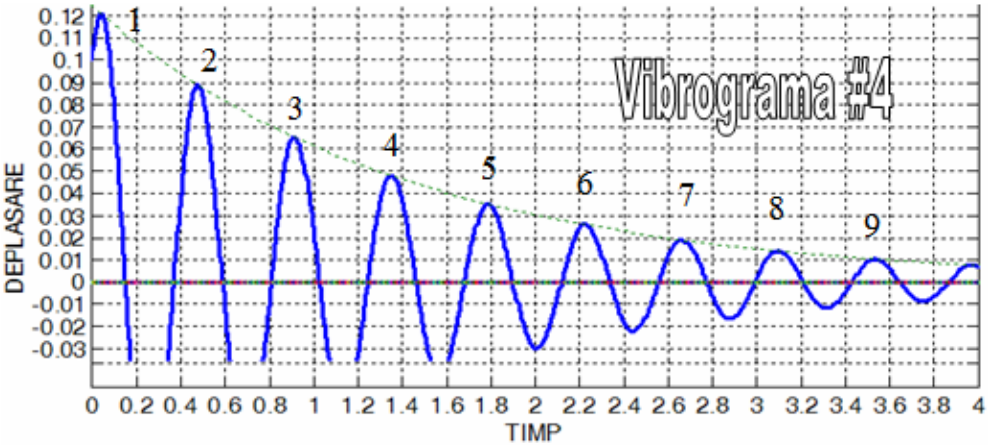
$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT_d)} \qquad \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi}$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{T_d\sqrt{1-\zeta^2}}$$









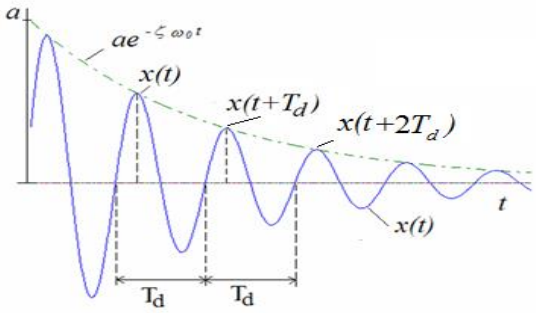


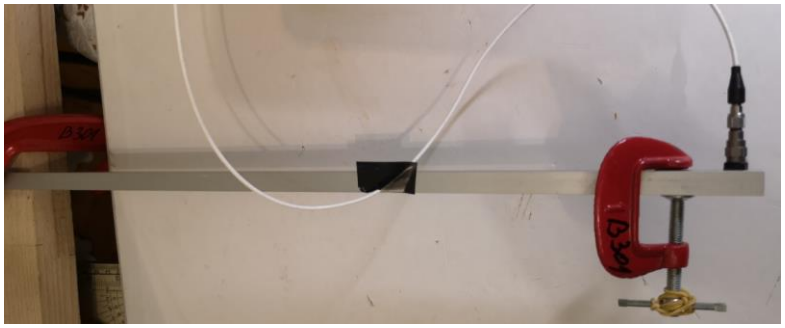
Fig. 10. Vibrograma (Matlab)

6.3. Vibrograma măsurată experimental

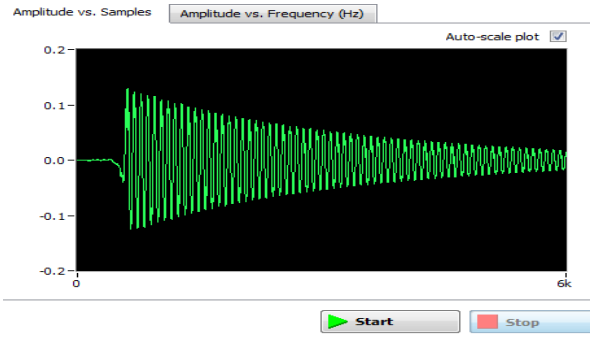
Sistemul mecanic: teavă pătrată aluminiu încastrată la un capăt şi cu masa la vârf

Placă de achiziţie NI USB 44xx, 24bit, 102 kS/s conectare laptop prin USB.

Accelerometru IEPE, conectat la canal intrare analogic.

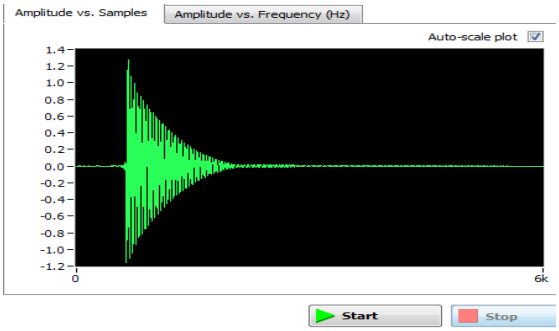


1.Vibrogramă măsurată, *cu masă adăugată* →
(masa=clema metalică roşie, figura de sus)



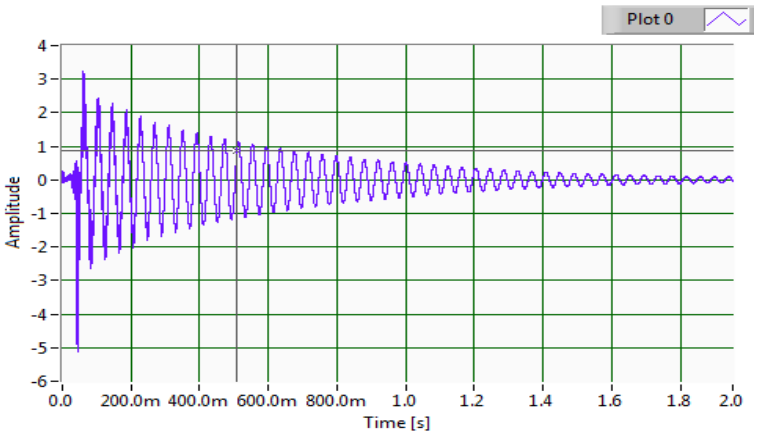
Nr. eşantioane 6k (6000eş)
Durata achiziţie: 3sec.
Feş=2000 eş/sec.

2.Vibrogramă măsurată *fără masă adăugată*
(fără clema metalică roşie) →



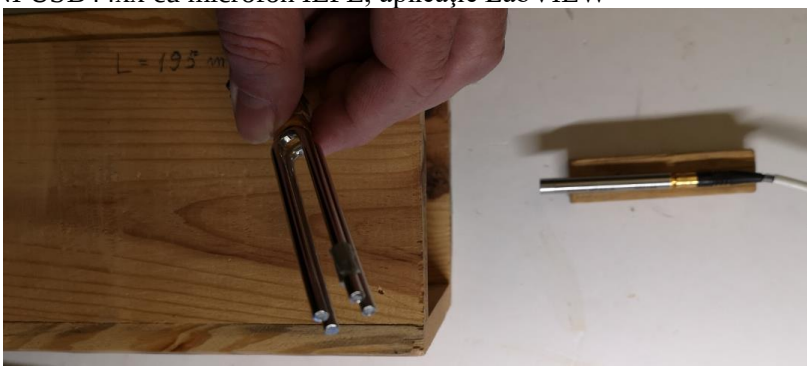
3.Vibrogramă măsurată (LabVIEW),
cu masă (figura de sus) →
(masa=clema metalică roşie)

Durata achizitie=2sec.
Feş=50ks/sec

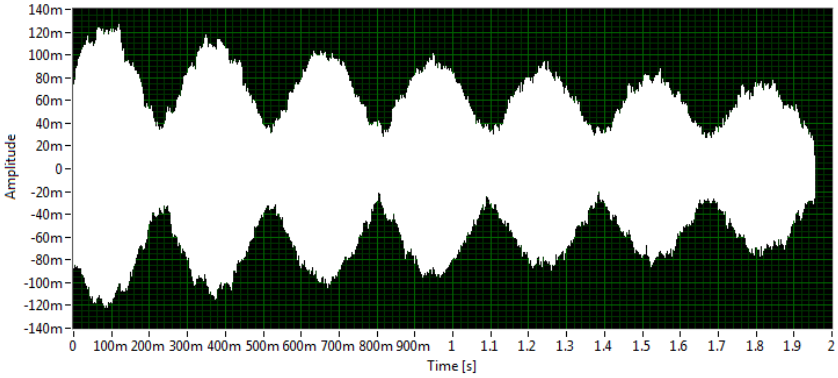
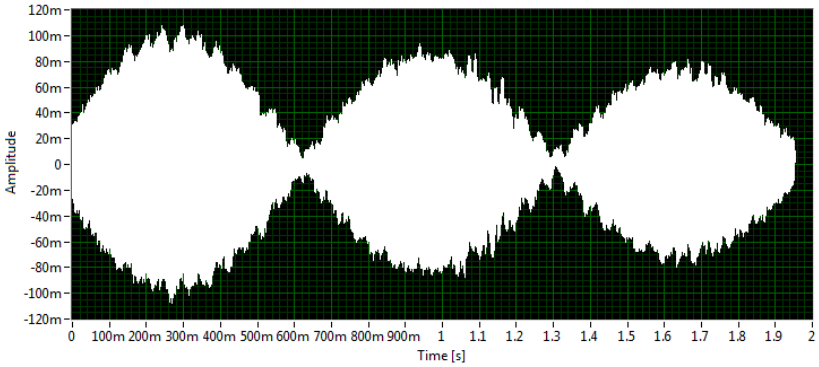


7. Fenomenul de bătaie observat experimental

7.1. Montaj: două diapazoane, cutie de rezonanţă, masa glisantă pe braţ diapazon#1
Sistem de achiziţie NI USB44xx cu microfon IEPE, aplicaţie LabVIEW



7.2. Masa la vârf braţ diapazon#1, durata achiziţie aprox.2sec. (7 bătăi în 2 secunde)
=> diferenţă mare între frecvente diapazoane f1-f2=fb frecvenţă mare bataie



7.3. Masa la bază braţ diapazon#1, durata achiziţie aprox.2sec. (3 bătăi în 2 secunde)
=> diferenţă mică între frecvente diapazoane f1-f2=fb frecvenţă mică bătaie