

ABSORBITORUL DINAMIC SIMPLU Laborator 5

Varianta Transformatei Laplace

1. Deducerea ecuațiilor diferențiale pentru un sistem mecanic cu 2 mase, 3 arcuri, 3 amortizoare

Se consideră sistemul cu două grade de libertate prezentat în figura 2.1.

Aplicând legile dinamicii se deduc ecuațiile diferențiale în formă matriceală. Scriem ecuațiile de echilibru dinamic pentru fiecare din masele sistemului considerat și presupunem la un moment relațiile $x_2 > x_1$ $\dot{x}_2 > \dot{x}_1$:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2 + f_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Trecem termenii în membrul stâng, mai puțin forțele active și grupăm termenii:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 &= f_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Punem cele două ecuații diferențiale în formă matriceală evidențiind matricea inerțială M , matricea de amortizare D , matricea de rigiditate K , vectorul coordonatelor generalizate Q și vectorul forțelor generalizate f :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Sistemul de ecuații diferențiale a fost adus la forma matriceală:

$$M\ddot{Q}(t) + D\dot{Q}(t) + KQ(t) = f(t) \quad (4)$$

2. Absorbitorul dinamic simplu de vibrații - prin particularizarea sistemului 1.

O mașină de masă m_1 , cu fundație izolatoare (k_1 , c_1 =neglijabil), conține un element de rotație excentric de masă m_e și excentricitate e . Rotația în funcționare are loc la o frecvență situată în vecinătatea frecvenței naturale $\omega_{lucru} \approx \omega_0 = \sqrt{k_1/m_1}$ a sistemului mașină-fundație cu $1gdl$ (m_1, k_1). Efectul acestei excitații aproape de rezonanță este generarea de vibrații excesive în structură și transmiterea lor în mediu prin fundație. Să se proiecteze un absorbitor de vibrații (m_2 , k_2) simplu (c_2 =neglijabil) pentru reducerea (teoretic anularea) vibrațiilor mașinii. Prin adăugarea absorbitorului rezultă per ansamblu un sistem cu $2gdl$. Să se determine k_2 dacă se cunoaște m_2 .

2.1 Particularizarea sistemului precedent

Simplificăm sistemul inițial pentru cazul mașinii cu absorbitor dinamic: $c_1=c_2=c_3=0$, $k_3=0$, $f_2=0$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sau } \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_0 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$F_0 = m_e \cdot \omega^2 \cdot e$ (6) este forța rotitoare de inerție cu acțiune asupra mașinii (masei m_1).

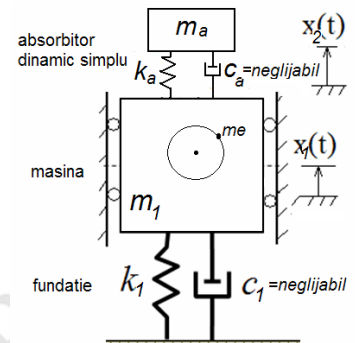
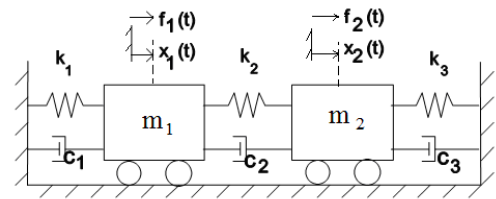
2.2. Extragere funcții de transfer și FRF folosind Transformata Laplace

Aplicăm transformata Laplace celor două ecuații diferențiale (condiții inițiale nule = vibrațiile libere sunt amortizate de o inerentă mică amortizare prezentă în sistem, rămânând vibrația forțată):

$$\begin{cases} m_1 s^2 X_1(s) + (k_1 + k_2) X_1(s) - k_2 X_2(s) = F(s) \\ m_2 s^2 X_2(s) - k_2 X_1(s) + k_2 X_2(s) = 0 \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} [m_1 s^2 + k_1 + k_2] X_1(s) - k_2 X_2(s) = F(s) \\ -k_2 X_1(s) + (m_2 s^2 + k_2) X_2(s) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Rezolvăm sistemul algebric în funcție de funcțiile $X_i(s)$.	Particularizând variabila $s=j\omega$ a funcțiilor de transfer $X_i(s)/F(s)$ se obțin cele două FRF=complanță ale sistemului. La numitorul fiecărei FRF se obține polinomul caracteristic al sistemului, rădăcinile fiind polii sistemului; xeroul ω_z anulează numărăt. Amplit. excit: $F(\omega) = m_e \cdot \omega^2 \cdot e (= F_0)$
$\begin{cases} X_1(s) = \frac{m_2 s^2 + k_2}{(m_2 s^2 + k_2)(m_1 s^2 + k_1 + k_2) - k_2^2} F(s) \\ X_2(s) = \frac{k_2}{(m_2 s^2 + k_2)(m_1 s^2 + k_1 + k_2) - k_2^2} F(s) \end{cases}$	$s=j\omega \rightarrow \begin{cases} X_1(\omega) = \frac{-m_2 \omega^2 + k_2}{(-m_2 \omega^2 + k_2)(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) - k_2^2} F(\omega) \\ X_2(\omega) = \frac{k_2}{(-m_2 \omega^2 + k_2)(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) - k_2^2} F(\omega) \end{cases} \quad (9)$

$FRF_{11}(\omega)$ este raportul dintre deplasarea masei m_1 și excitația armonică asupra masei m_1 în funcție de frecvență.



2.3. Condiția de absorbire a vibrațiilor sistemului inițial (mașină-fundație elastică)

Prin condiția de anulare a număratorului $FRF_{11}(\omega)$, se obține pulsația de excitație ω_z (zeroul) pentru care deplasarea X_1 a masei m_1 este nulă **dacă m_2 și k_2 sunt date**:

$$-m_2 \omega^2 + k_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_z = \sqrt{k_2 / m_2} \quad \omega_z = \text{pulsație pentru anulare deplasare } m_1 \quad (10)$$

Pentru excitația $F_0 \cos \omega_z t$ la frecvența $\omega_z \rightarrow m_1 = \text{fix}$ iar $m_2 = \text{deplasare armonică de amplitudine: } X_2 = -F_0 / k_2$

** In cazul studiat se cunoaște pulsația de lucru a masinii $\omega_{lucru} = \omega_{01}$ pentru care trebuie absorbite vibrațiile masei m_1 .

La pulsația ω_{lucru} trebuie să se anuleze număratorului $FRF_{11}(\omega_{lucru}) = 0$:

$$\omega_z = \omega_{lucru} \quad (11)$$

Rezultă raportul necesar dintre rigiditatea și masa absorbitorului:

$$\omega_{lucru}^2 = \omega_z^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad (12) \Rightarrow \boxed{k_2 \text{ necesar}} \text{ când } m_2 \text{ și } \omega_{lucru} \text{ sunt date} \Rightarrow \boxed{k_2 = \omega_{lucru}^2 \cdot m_2} \quad (13)$$

Interpretare: pentru minimizarea deplasării masei mașinii (m_1), *trebuie ca sistemul adăugat (m_2, k_2) atașat masei m_1 să aibă pulsația naturală $\omega_{02} = \sqrt{k_2 / m_2}$ (când este independent și detașat: 1gdl) egală cu pulsația de lucru/excitație aplicată masei m_1 în funcționare.* OBS1: sistemul nou cu 2gdl va avea două pulsații naturale ω_1, ω_2 date de polinomul caracteristic al noului sistem (cu ω_1 ușor $< \omega_{01}$ deoarece s-a adăugat masa m_2 iar $\omega_{01} < \omega_2$), unde ω_{01} este pulsația sistemului inițial cu 1gdl independent. Forța transmisă fundației este nulă când excitația este $F_0 \cos \omega_z t$.

2.4. EXPERIMENT: motor cu excentric (alimentat de la autotransformator) plasat pe consolă + sistem absorbitor dinamic (sala C103); vezi teoria CURS 4 din 7, p2: Structură cu masă excentrică în rotație.

Absorbitorul dinamic simplu: cilindru ($m_2 = m_a$) + tijă de lungime l_2 variabilă ($k_2 = ?$)

Masa cilindru: $\pi \cdot D^2 / 4 \cdot 35,8 \cdot 7800 \text{ kg/m}^3$; $D = 40 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
 $\text{masa} = \pi \cdot (D^2) / 4 \cdot 35,8 \cdot 7800$

masa cilindru $m_2 = 0.3537 \text{ kg}$;

masa totală cil+tija = $374.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ (măsurată);

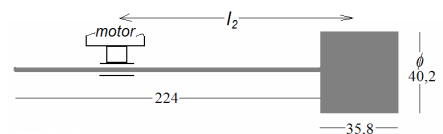
masa tija = masa tot. – masa cilindru = $20,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$

masă tija = **20,5e-3 Kg** *Itinerar de calcul pentru lungimea teoretică a tijei:*

diametru tija $d = 4,02 \text{ mm}$ k arc lamelar: $k_a = k_2 = \frac{3E_2 I_2}{l_2^3} \Rightarrow l_2 = \sqrt[3]{\frac{3E_2 I_2}{k_2}} = \sqrt[3]{\frac{3E_2 I_2}{m_2 \omega_{lucru}^2}}$, unde: $I_2 = \frac{\pi d^4}{64}$ (14)

$l_{2\text{expe}} = \text{lungime tija} + 0.018 \text{ m}$

($0.0358/2 = 0.018 = \text{distanță la centrul de masă a cilindrului } m_2$)



Nr. crt.	d [m] diame- tru tija	$m_2 = m_a$ [kg] =masa cilindru +1/3m tija	E2 tija [N/m ²]	I2 tija [m ⁴] (vezi formula)	$f_{lucru} = f_z$ [Hz] 1gdl rezon. masur strobo VP	$\omega_{lucru} = \omega_{01}$ ω_z [s ⁻¹] $= 2\pi f_{lucru}$	l_2 experim [m] la absorbire maximă	l_2 teor. [m] (calcul) (14)	Eroare rel %
1	4.02e-3	0.3537			14		0.13		
2	(4mm)	+1/3*masa tija	210e9		13.5		0.125		
3		l2 în consola)			14.3		0.125		

Mod de lucru: 1. alimentăm cu tensiune motorul și aducem sistemul m_1 - k_1 foarte aproape de rezonanță: măsurăm f_{lucru} (cu stroboscop sau vibrometru portabil VP), oprim motorul (putem menține strobo), **2.** adăugăm absorbitorul (tija+masă) cu $l_2 = \min(\omega_1 > \omega_{01})$, pornim motorul și turăm+menținem motorul la f_{lucru} indicată de stroboscop, **3.** lungim tija absorbitorului până obținem reducerea maximă a vibrațiilor masei m_1 , oprim motorul, **4.** notăm l_2 expe. **5.** repetăm experimentul, **6.** calcul l_2 teor. rel (14): ω_{lucru} , $k_2 = \omega_{lucru}^2 \cdot m_2 \Rightarrow l_2$ teor., **7.** completăm tabelul.

Modurile de vibrație ale sistemului m_1 - k_1 - m_2 - k_2 :

Mod #1 la $\omega_1 < \omega_{01} = \sqrt{k_1 / m_1}$	la $\omega_z = \omega_{01} \rightarrow m_1 = \text{fix}$	Mod #2 la $\omega_2 > \sqrt{k_1 / m_1}$

Absorbitorul la ω_z produce o forță armonică $k_2 x_2$ care anulează la orice moment forța de excitație iar m_1 devine fix.

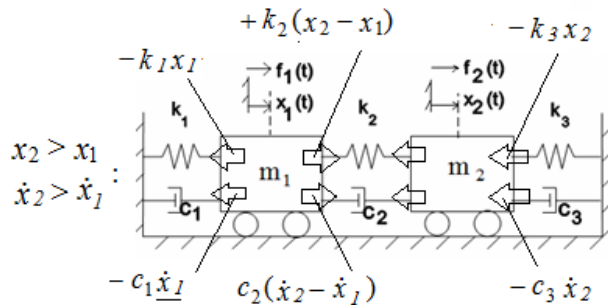
Plan de lucru, Laborator #5

01. Simularea m-c-k + forță de inerție rotitoare pentru $r=1$ (101) $\Rightarrow$ excitație la rezonanță $\omega_{lucru} \approx \omega_{01} = \sqrt{k_1/m_1}$

C:\... \MATLAB\AnimFortaArmonica.m

02. Simulare absorbitor dinamic simplu $\Rightarrow$ sistem cu 2 moduri de vibrație și absorbirea vibrațiilor la $\omega_{lucru} = \omega_{01}$ (simularea din mijloc la care **m1=fix** + absorbitorul), C:\... \MATLAB\AnimAbsoritorDinaSimplu.m

1. Prezentare Lucrare Laborator 5 începând cu sistem 2mase 3 arcuri ...



1.1. deducerea celor două ecuații dif.

2.1. Transformata Laplace: a celor 2 ec. particularizate

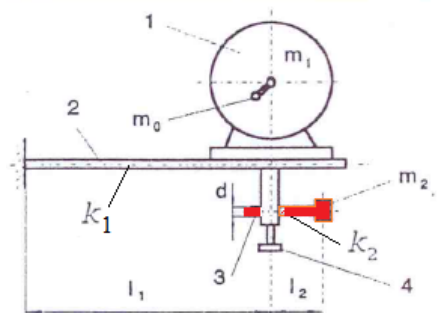
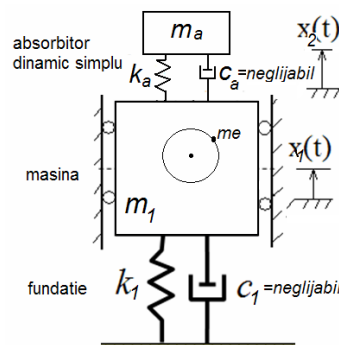
2.2. Extragere Funcții de transfer complianță
Vezi mai jos program MATLAB

2.3. Anulare numărător FRF11=0

$$\Rightarrow -m_2 \omega^2 + k_2 = 0$$

** Similitudine între:

sistemul 2mase 2 arcuri
elicoideale
și
sistemul 2 mase 2 arcuri
încovoiere



2.4 Experiment + completare tabel

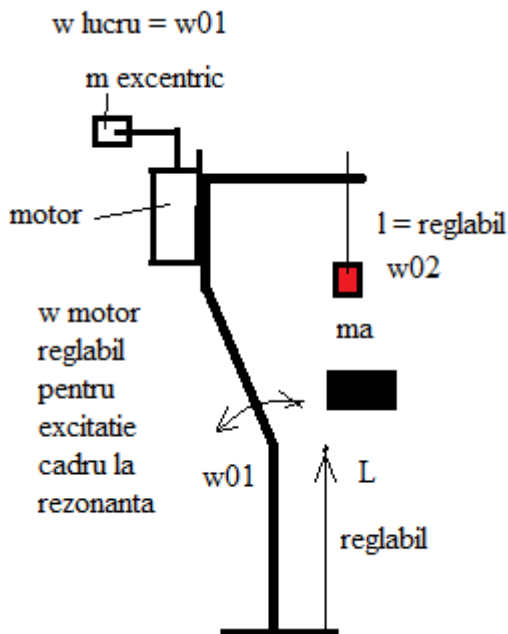
2.2. Extragere Funcții de transfer complianță Programa MATLAB

```
clear;
syms s m1 m2 k1 k2 X1 X2 F1 w ;
[X1 X2]=solve('(m1*s^2+k1+k2)*X1-k2*X2=F1', '-k2*X1+(m2*s^2+k2)*X2=0',[X1, X2]);
X1=collect(X1, 's'); X1=collect(X1, 'F1');
X2=collect(X2, 's'); X2=collect(X2, 'F1');
pretty(X1); pretty(X2);
```

```
j=sqrt(-1);
X1w=subs(X1,s,j*w);X2w=subs(X2,s,j*w);
pretty(X1w); pretty(X2w);
```

$$\begin{array}{c} \text{F1} \quad (-m_2 w^2 + k_2) \\ \hline m_1 m_2 w^4 + (-k_1 m_2 - k_2 m_1 - k_2 m_2) w^2 + k_1 k_2 \\ \text{F1} \quad k_2 \\ \hline m_1 m_2 w^4 + (-k_1 m_2 - k_2 m_1 - k_2 m_2) w^2 + k_1 k_2 \end{array}$$

Temă. Sa se confecționeze un cadru conform figurii de mai jos pe care se vor experimenta absorbitori de vibrații. Se poate regla w_01 modificând L , se poate regla w_{lucru} variind turația motorului pentru a excita la rezonanța structura cadru; se poate regla w_02 prin modificare $k_a=k_2$ prin reglare l astfel încât w_02 sa fie egal cu $w_{lucru}=w_01=w_z$.

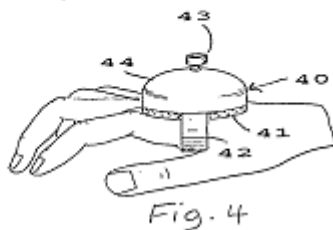


Exemple diverse:

U.S. Patent

Oct. 22, 1991

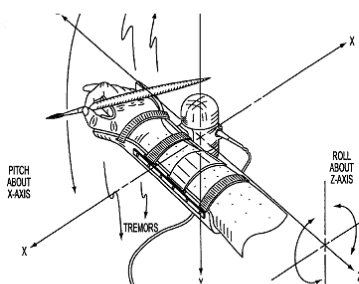
Sheet 2 of 2



ADJUSTABLE AND TUNABLE HAND TREMOR STABILIZER

Patent No.: US 6,730,049 B2

Date of Patent: May 4, 2004



A tunable and adjustable device for stabilizing tremors includes a rigid splint for receiving a patient's hand, wrist and forearm, and at least one gyroscope removably and rigidly attachable to said splint and positionable for countereffecting the tremors. Also, a method for tuning and

New Technology

- Piezo-electric devices for gyroscopic motion – high speed ; low mass = acceptable inertia
- Active DVA – gyro system coupled with accelerometer with feedback system to REACT
- Form factor : Location (no bigger than wristwatch ; not to interfere with hand function)



Vibration absorber in the transmission lines



Tuned mass dampers beneath the bridge platform.



Vibration Absorber for Wind Power Plants



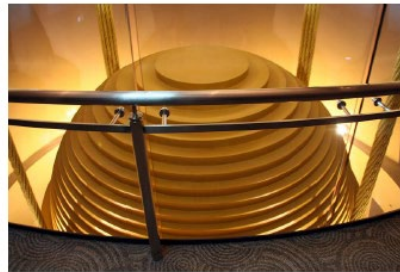
Adjustable vibration absorber to lessen the first tower natural frequency at wind power plants

Vibration absorber installed below the nacelle of a 1 MW wind power plant

101 Taipei tower, 730tone sfera, reduce amplitudinea vibr. la vânt cu 40% și seisme, deplasare max. efectuată 1metru



Tuned Mass Damper in the building



A pipe carrying steam through a section of a factory vibrates violently when the driving pump hits a speed of 232 rpm. In an attempt to design an absorber, a trial 1 kg absorber tuned to 232 rpm was attached. By changing the pump speed, it was found that the pipe-absorber system has a resonance at 198 rpm. Redesign the absorber so that the natural frequencies are less than 160 rpm and more than 320 rpm.

