MODELAREA ELECTRICA A UNUI SISTEM MECANIC VIBRANT CU UN GRAD DE LIBERTATE

Scopul lucrarii

Este trasarea diagramei factorului de amplificare în cazul unui sistem mecanic cu un grad de libertate ce efectueaza vibratii fortate amortizate cu forta perturbatoare armonica. Diagrama experimentala se ridica pe un circuit electric ce modeleaza sistemul mecanic.

Consideratii teoretice

Fie doua sisteme mecanice simple (fig.1 si fig.2) ce executa vibratii fortate amortizate. Ecuatiile miscarilor sunt:

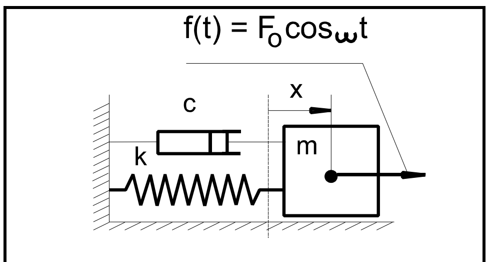


Fig.1

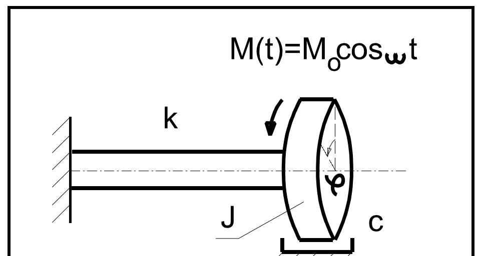


Fig.2

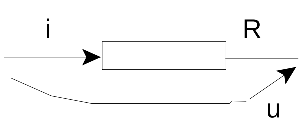
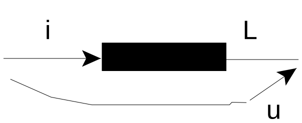
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \qquad (1)$$

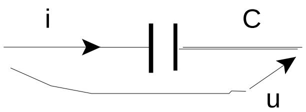
$$J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + k\varphi = M(t) \qquad (2)$$

ecuatii diferentiale liniare de ordinul doi cu coeficienti constanti neomogene.

Circuitele electrice in c.a. sunt caracterizate d.p.v. al comportarii in timp tot de ecuatii diferentiale liniare de ordinul doi cu coeficenti constanti, neomogene. Din cauza similitudinii ecuatiilor diferentiale s-a ajuns la ideea modelarii sistemului mecanic cu un sistem electric (circuit electric), modelare foarte avantajoasa d.p.v. experimental. Rezulta de aici ca anumite elemente mecanice vor avea ca elemente analoage anumite elemente electrice adica se poate face o analogie mecano-electrica. Pe baza relatiilor dintre tensiunea si curentul corespunzatoare unor elemente simple, pasive si ideale de circuit (tab.1) analogia mecano-electrica se numeste directa daca sunt utilizate relatiile directe tensiune-curent sau indirecta in caz contrar.

Tabelul 1

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Relatii tensiune - curent</td></tr>
<tr><td>Directe</td><td>Inverse</td></tr>
<tr><td></td><td>$u = Ri$</td><td>$i = u/R$</td></tr>
<tr><td></td><td>$u = L\frac{di}{dt}$</td><td>$i = \frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau$</td></tr>
</table>

	$u = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$	$i = C\frac{du}{dt}$

Pentru cazul analogiei directe corespondenta marimilor mecanice cu cele electrice este data în tabelul 2

Tabelul 2

Sistemul mecanic	Sistemul electric
masa m sau m.i.m. J	inductanta L
const.de amortiz. c	rezistenta R
const.elastica k	1/C
coord.generalizata (x, φ)	cantitate de electricit. q
viteza generalizata ($\dot{x}$, $\dot{\varphi}$)	intensitatea c.e. i
f. perturb.generalizata (f(t), M(t))	sursa de t.e.m. e(t)
grad de libertate	bucla de circuit
principiul lui d'Alembert	teorema a II-a Kirchhoff
f. de inertie generaliz. ($m\ddot{x}$, $J\ddot{\varphi}$)	tens. pe bobina L di/dt
f. de amortiz. gen. ($c\dot{x}$, $c\dot{\varphi}$)	tens. pe rezistenta Ri
f. elastica gen. (kx, kφ)	tens. pe condensator q/C
elem.de leg. intre 2 mase sau intre doi rotori	elem.comun intre 2 bucle de circuit

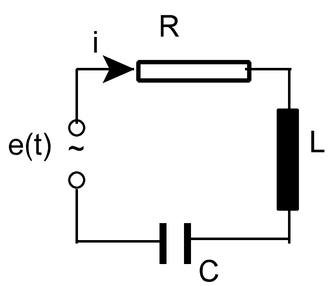


Fig. 3

Fie un circuit electric RLC serie alimentat in c.a. de la o sursa de tensiune e(t) (fig.3). Plecand de la relatiile directe dintre tensiune si curent (tab.1) cu ajutorul T II Kirchhoff aplicata buclei de circuit avem:

$$(\Sigma u_k = 0) \qquad u_R + u_L + u_c - e(t) = 0 \qquad (3)$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = e(t) \qquad (4)$$

Intensitatea c.e. se defineste ca fiind variatia cantitatii de electricitate ce trece printr-o sectiune a unui conductor in timp:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (5)$$

Inlocuind expresia (5) in (4) obtinem ecuatia de functionare a circuitului

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t) \qquad (6)$$

care cu notatiile din mecanica pentru derivate poate fi pusa sub forma:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t) \tag{7}$$

analoaga d.p.v. matematic cu rel.(1) sau (2).

Se observa ca fortei perturbatoare ii corespunde tensiunea sursei. Din aceasta cauza *analogia mecano-electrica directa* se mai numeste si *analogia forta-tensiune*. La baza analogiei sta afirmatia ca in timpul functionarii celor doua sisteme, marimile mecanice si cele electrice sunt si raman proportionale. De aici rezulta importanta coeficientilor de proportionalitate dintre marimile mecanice si cele electrice, coeficienti ce poarta numele de factori de scara si se definesc astfel:

$$\begin{aligned} &k_1 = \frac{m}{L}; \quad k_2 = \frac{c}{R}; \quad k_3 = \frac{k}{1/C} = kC; \\ &k_4 = \frac{x}{q}; \quad k_5 = \frac{f}{e}; \quad k_6 = \frac{t_m}{t_e} \end{aligned} \tag{8}$$

pentru cazul vibratiilor sistemului mecanic din fig.1. Primii cinci coeficienti sau factori de scara au dimensiuni din cauza naturii fizice diferite a marimilor si anume:

$$[k_1]_{si} = kg/H; [k_2]_{si} = Ns/m\Omega; [k_3]_{si} = NF/m; [k_4]_{si} = m/C; [k_5]_{si} = N/V \tag{9}$$

Al saselea factor de scara este adimensional deoarece a fost definit conform cu (8) ca fiind raportul dintre timpul din sistemul mecanic si timpul din circuitul electric.

In cazul vibratiilor la torsiune ale sistemului mecanic din fig.2 coeficientii sau factorii de scara vor avea alte dimensiuni.

Cu ajutorul rel. (8) putem exprima toate elementele ce intervin in ecuatia diferentiala (1) a sistemului mecanic in functie de elementele sistemului electric:

$$\begin{aligned} &m = k_1 L; \quad c = k_2 R; \quad k = k_3/C; \quad x = k_4 q; \quad f = k_5 e; \\ &\frac{dx}{dt_m} = \frac{k_4}{k_6}\frac{dq}{dt_e}; \quad \frac{d^2x}{dt_m^2} = \frac{k_4}{k_6^2}\frac{d^2q}{dt_e^2} \end{aligned} \tag{10}$$

apoi inlocuindu-le in ecuatia diferentiala (1) a sistemului mecanic obtinem succesiv:

$$k_1 L \frac{k_4}{k_6^2}\frac{d^2q}{dt^2} + k_2 R \frac{k_4}{k_6}\frac{dq}{dt} + \frac{k_3}{C}k_4 q = k_5 e \tag{11}$$

si

$$\frac{k_1 k_4}{k_5 k_6^2}L\ddot{q} + \frac{k_2 k_4}{k_5 k_6}R\dot{q} + \frac{k_3 k_4}{k_5}\frac{1}{C}q = e \tag{12}$$

Ecuatia diferentiala (12) modeleaza electric sistemul mecanic din fig.1. Pentru ca fenomenul real (mecanic) sa fie analog cu fenomenul electric din circuitul din fig.3 trebuie impusa conditia identitatii ecuatiilor diferentiale (7) si (12). Rezula un numar de trei relatii:

$$\frac{k_1 k_4}{k_5 k_6^2} = 1; \quad \frac{k_2 k_4}{k_5 k_6} = 1 \quad si \quad \frac{k_3 k_4}{k_5} = 1 \tag{13}$$

intre cei sase factori de scara. Inseamna ca numai trei dintre ei sunt independenti. Prin urmare numai trei pot fi alesi arbitrar. In plus in relatia (13) apare raportul k_4/k_5. Aceasta impune ca unul dintre cei trei factori de scara ce pot fi alesi arbitrar sa fie neaparat sau k_4 sau k_5.

Utilizarea analogiei mecano-electrice directe este foarte avantajoasa deoarece permite modelarea functionarii unor sisteme mecanice complicate cu ajutorul unor circuite electrice simple usor de realizat in laborator. In plus regimul de vibratii fortate cu forta perturbatoare armonica poate fi studiat d.p.v.al comportarii la diferite frecvente deosebit de simplu fiindca t.e.m e(t) se obtine de la generatoare de semnal sinusoidal cu o plaja de variatie a frecventei foarte larga.

Trecand in reprezentare complexa ec.(1) obtinem:

$$(-m\omega^2 + j\omega c + k)X = F_0 e^{j\omega t} \tag{14}$$

in care $X = a e^{j(\omega t - \varphi)}$ este deplasarea complexa a masei m.

Aceasta rezulta imediat din (14):

$$X = a_s \frac{e^{j\omega t}}{1 - r^2 + 2jr\zeta} \tag{15}$$

S-au folosit notatiile:

$$r = \omega/\omega_0; \quad \zeta = c/c_0; \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$
$$c_0 = 2\sqrt{km} \quad si \quad a_s = F_0/k \tag{16}$$

Factorul de amplificare complex are expresia:

$$A_c = \frac{1}{1 - r^2 + 2jr\zeta} \tag{17}$$

modulul si faza numarului complex A_c fiind

$$A = |A_c| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \tag{18}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \tag{19}$$

Modulul A se numeste *factor de amplificare* si se defineste ca raportul dintre amplitudinea miscarii a si sageata statica a_s.

Reprezentarile grafice ale factorului de amplificare A si defazajului φ functie de raportul r sunt date in fig.4 si fig.5.

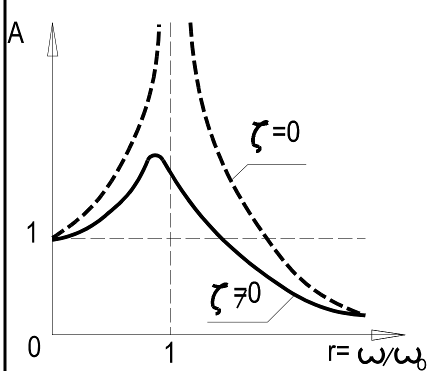


Fig.4

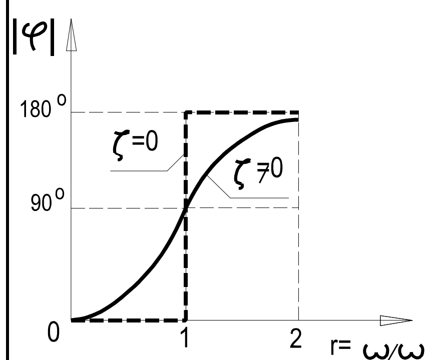


Fig.5

Legea de miscare în regim permanent a masei m sub actiunea fortei perturbatoare armonice este:

$$x(t) = Re(X) = \frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}}\cos\left(\omega t - arctg\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right) \tag{20}$$

Descrierea instalatiei

Instalatia prezentata in fig.6 este compusa din

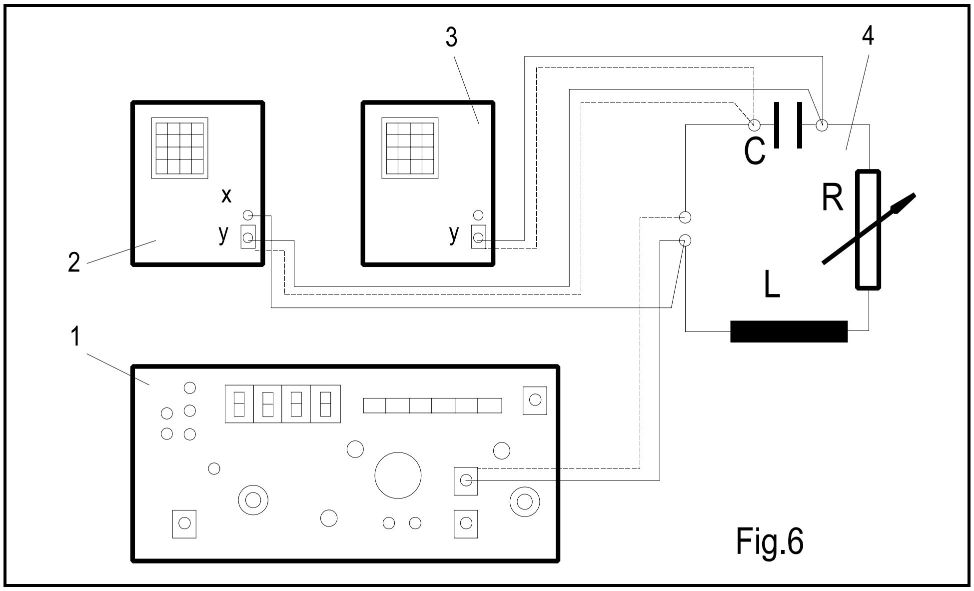


Fig.6

1 - generator de semnal sinusoidal tip VERSATESTER E 0502
2,3 - osciloscop tip E 0102
4 - circuit RLC serie format dintr-o cutie decadica cu rezistente R, o bobina L si un condensator C.

Mersul lucrarii si prelucrarea datelor

1. Se noteaza cu i suma dintre numerele de ordine ale facultatii si sectiei, iar cu j numarul de ordine al semigrupei din cadrul anului de studiu.
2. Se calculeaza elementele sistemului mecanic cu relatiile:

$$\begin{aligned} m &= 10(0{,}5+0{,}005i) && [kg] \\ c &= 1650+40i-25j && [Ns/m] \\ k &= 4.10^6(2-0{,}05i) && [N/m] \qquad (21) \\ F &= 150+10i+5j && [N] \end{aligned}$$

3. Cu ajutorul relatiilor (21) si (16) se determina pulsatia proprie ω_{om}, frecventa proprie f_{om}, coeficientul de amortizare critic c_0 si raportul de amortizare ζ.
4. Se dau urmatoarele elemente ale sistemului electric:
$L = 1[H]$; $C = 10^{-9}[F]$; $e = 1{,}25[V]$ (22)

5. Se calculeaza pulsatia si frecventa proprie a sistemului electric

$$\omega_{oe} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \qquad f_{oe} = \frac{\omega_{oe}}{2\pi} \tag{23}$$

6. Se aleg trei factori de scara independenti k_1,k_3 si k_5 (calculati cu relatia (8)). Ceilalti factori de scara ramasi, tinand cont de (13), se calculeaza astfel:

$$k_2 = \sqrt{k_1 k_3}; \quad k_4 = k_5/k_3; \quad k_6 = \sqrt{k_1/k_3} \tag{24}$$

7. Stiind ca infasurarea bobinei are o rezistenta $R_{bob}=185\,\Omega$ se determina rezistenta echivalenta din circuitul electric R_e si rezistenta R care se va regla pe cutia decadica cu rezistente:

$$R_e = c/k_2; \quad R = R_e - R_{bob} \tag{25}$$

8. Se completeaza tabelul 3 cu marimile calculate

Tabelul 3

Sist.mecanic	Coef.de scara	Circ.electric
m = [kg]	k_1 =	L = 1 [H]
c = [Ns/m]	k_2 =	R_e = [Ω]
k = [N/m]	k_3 =	C = 10^{-9}[F]
x [m]	k_4 =	q [C]
F = [N]	k_5 =	e = 1,25[V]
ω_{om} = [rad/s] f_{om}= [Hz]	k_6 =	ω_{oe} = [rad/s] f_{oe} = [Hz]

9. Se masoara pe osciloscopul 2 (fig.6) amplitudinea y_s, in diviziuni, a tensiunii de la bornele condensatorului la o frecventa joasa (50Hz).

10. Modificând frecventa de la generatorul de tensiune sinusoidala 1 se masoara amplitudinile y, in diviziuni ale tensiunii de la bornele condensatorului. Simultan se urmareste pe osciloscopul 3 cum se compun tensiunea de la bornele circuitului cu tensiunea de pe condensator rezultand o figura Lissajous, o elipsa, datorita egalitatii frecventelor celor doua semnale. Dupa forma si pozitia axelor de simetrie ale elipsei se poate observa calitativ defajazul dintre semnale.

S-a ales prin masurarea tensiunii de la bornele condensatorului o metoda indirecta de masura a cantitatii de electricitate din sistemul electric (q=Cu), marime analoaga deplasarii x din sistemul mecanic.

11. La aceleasi valori ale raportului r, cu relatia (18) se calculeaza valorile factorului de amplificare A al sistemului mecanic si ale defazajului φ , rel.(19).

12. Se completeaza tabelul 4 cu datele de la punctele 5,9,10 si 11

Tabelul 4

Nr.crt.	f_{oe} [Hz]	f[Hz]	r=f/f_{oe}	y_s [div]	y [div]	Fact. de amplificare		φ_{teor}
						A_{teor}	A_{exp}=y/y_s	
1.		1000						
2.		2000						
3.		3000						
4.		4000						
5.		5000						
6.		6000						
7.		7000						
8.		8000						
9.		9000						
10.		10000						

13. Se reprezinta grafic curbele A_{exp}=A_{exp}(r) si A_{teor}=A_{teor}(r) pe o aceeasi diagrama si curba $\varphi_{teor} = \varphi_{teor}(r)$ separat.

Obs.: - toate calculele se fac utilizand programele MODEL1.EXE si MODEL2.EXE